代数幾何学シンポジウム記録
1979年度　pp.32-40

Equivariant Embeddings

阪大　数養部　満渕　俊樹

微分幾何学等で compact 群の C^∞ 多様体への作用を扱う際には、その compact 群をある適当な metric に対する isometries とみなすことによって、随分詳しい情報が得られている。例えば、所謂 exponential map が fixed point locus の normal bundle からもとの多様体への group equivariant な submersion になっているという様なこともただちに導かれる。これと同様のことが reductive algebraic group の代数多様体への作用についても言えないであろうか？

以下、基礎体 $k=\mathbb{C}$，かつ代数群の作用はすべて regular と仮定する。上記の問題に対して $\mathbb{C}^\times$ の non-singular projective variety への作用の場合は、Bialynicki-Birula [1] によって強力な stratification theorem が見出され、一方 reductive algebraic group の affine algebraic ~~group~~ variety への作用に関しては Luna [2] によって詳しい研究がなされている。そこで

我々は $G=SL(m;\mathbb{C})$ の non-singular algebraic variety V (not necessarily complete or affine) への non-trivial action を調べてみた。この場合、その fixed point locus V^G が non-singular であることは良く知られている。(これは一般の reductive algebraic group に対して成りたつことである。) 我々は次の定理を得た。

定理： Let W be an irreducible component of V^G s.t. $\mathrm{codim}_V W \leq m$ $\Longrightarrow$ Then W is a connected component of V^G with $\mathrm{codim}_V W = m$, and $\exists$ a natural G-equivariant open immersion $N(V:W) \hookrightarrow V$. Furthermore, if ψ is a biregular automorphism of V, then we have the following:

i) $\psi(W)=W \Rightarrow \psi(N(V:W))=N(V:W)$ as subsets of V.

ii) $\psi|_W = id_W \Rightarrow \exists$ regular function f on W s.t. $\psi|_{N(V:W)}$ = multiplication by f in $N(V:W)$.

注意：(この定理は $m=1$ の時は $G=\mathbb{C}^\times$ に対して成りたつ。) さてこの定理の証明は省略するが、ここではその大体の感じがつかめる様に、上の定理で $\dim V = m$ のときの証明の概略を述

べてみる。そこで $\dim V = m$ とし，点 $p \in W$ をひとつ任意に固定する。点 p における $G = SL(m; \mathbb{C})$ の isotropy representation は faithful であるから (cf. Bialynicki-Birula [2])，$T_p(V)\,(\cong \mathbb{C}^m)$ への G-action は $T_p(V)$ の適当な $\mathbb{C}$-basis をとることによって standard representation になるか contragredient representation になるかのいずれかである。いずれの場合も $T_p(V)$ は

$$(\#) \qquad T_p(V) = \big(T_p(V) - \{0\}\big) \cup \{0\}$$

と2つの G-orbit にわかれる。このことから，W が positive dimension をもつことはない。$\therefore \dim W = 0$．よって $W = \{p\}$. これから W は V^G の connected component with $\underbrace{\mathrm{codim}_V W}_{=m}$ となっていることがわかる。次に Sumihiro [4] の定理によって $\exists$ G-stable quasi-affine open nbd U of p in V on which G acts linearly, i.e., for some realization $U \subseteq \mathbb{C}^N$ as a quasi-affine variety, the G-action on U extends to a linear action on $\mathbb{C}^N$ centered at $p = 0 \in \mathbb{C}^N$。さて $G = SL(m; \mathbb{C})$ は reductive なので，この $\mathbb{C}^N$ は G-stable vector subspace の和 $\mathbb{C}^N = T_p(V) \oplus T_p(V)^{\perp}$ に書かれる。ここで，$pr_1 : \mathbb{C}^N \to T_p(V)$ を canonical projection to the first factor

とすれば $pr_1|_U : U \to T_p(V)$ は点 p で Jacobian が maximal rank をもつ。U を適当に小さくすることによって、最初から $pr_1|_U$ が étale だと仮定してよい。さて $(pr_1|_U)^{-1}(T_p(V)-\{0\})$ は m-dimensional G-orbits の disjoint union (cf. (#))。$\dim V = m$ だからすべての m-dimensional G-orbits は open dense in V. よって $(pr_1|_U)^{-1}(T_p(V)-\{0\})$ = a single G-orbit. ところが $T_p(V)-\{0\} \cong \mathbb{C}^m-\{0\}$ $(m \geq 2)$ は simply connected であるので、$pr_1|_U$ を $(pr_1|_U)^{-1}(T_p(V)-\{0\})$ に制限したものは isomorphism onto $T_p(V)-\{0\}$ となっいる。そこで、$pr_1|_U$ が birational surjective morphism with finite fibres となっており、Zariski Main Theorem によって、$pr_1|_U : U \xrightarrow{\cong} T_p(V)$ が isomorphism であることがわかる。よって ∃ G-equivariant open immersion $\left(= (pr_1|_U)^{-1}\right)$ $T_p(V) \hookrightarrow V$. さて、ψ を V の biregular automorphism としたとき、$N(V:W) \left(= T_p(V)\right) = \{ q \in V ;$ Zariski closure of $G \cdot q$ in V contains $p \}$ に注意すれば、$\psi(W) = W$ 即ち $\psi(p) = p$ を仮定した時、$\psi(N(V:W)) = N(V:W)$ が導かれることは直ちにわかる。また、$G = SL(m;\mathbb{C})$ の non-trivial linear action の与えられた $\mathbb{C}^m$ (その action

は $SL(m;\mathbb{C})$ の standard representation か contragredient representation のいずれかに equivalent となることは well-known）に対し．G-equivariant biregular automorphism of $\mathbb{C}^m$ which maps $\{0\}$ to $\{0\}$ は必ず vector space $\mathbb{C}^m$ の scalar multiplication になっているという事実から．$\psi|W = id_W$ (i.e. $\psi(p) = p$) のとき $\psi|_{N(V:W)}$ = scalar multiplication by a complex number in $N(V:W)(=T_p(V))$. となっていることが直ちに導かれる。

以上は $\dim V = m$ のときの定理の証明の概略であるが一般の $\dim V \geqq m$ の場合も（$\dim V < m$ となることはない）ただ単に W の各点 p に対する上の議論を，W に沿ってのばしていくことによって証明をするわけである。詳しくは [3] を見られたし。

最後に上の定理の応用を2つあげておく。

Cor : $G = SL(m;\mathbb{C}) \times V \longrightarrow V$ non-trivial regular action

V : m-dimensional normal complete variety, V^G contains a simple point of V.

$\Rightarrow$ $V \cong \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ (biregular)

証明》 $p \in V^G$ を V の simple point とせよ。V^G の点 p を通る irreducible component W をとってくると、上の定理によって、$\dim W = 0$ 即ち $W = \{p\}$ となっている。しかも $\exists$ natural open immersion: $T_p(V) \hookrightarrow V$.
さて点 p に於ける isotropy representation

$$G (\subseteq SL(m;\mathbb{C})) \longrightarrow GL(T_p(V))$$

は m-dimensional $\mathbb{C}$-vector space $T_p(V)$ の $\mathbb{C}$-basis を適当に定めることによって standard representation になるか contragredient representation になるかのいずれかである。いずれの場合も $T_p(V)\ (\cong \mathbb{C}^m)$ にひとつの orbit $\mathbb{P}(T_p(V))$ $(=(\text{set of lines in } T_p(V)) \cong \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C}))$ をつけ加えることによって G-equivariant compactification $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ of $T_p(V)$ を得る。さて、

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\ T_p(V) \arrow[u, phantom, "\bigcup"] \arrow[r, hook] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & V \end{tikzcd}$$

によって G-equivariant birational map φ が定義されるが、φ の set of points of indeterminacy $(= S)$ は、$\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ $(= \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) - T_p(V))$ の G-stable subset でしかも $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ の中で codimension 2 をもつ。よって

S は $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ の proper subset. ところが $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ は single orbit であるから、結局 $S = \phi$. 即ち φ は、birational morphism。一方、ψ のある fibre が positive dimension をもつ、と仮定すると、$\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ の curve と codim 1 の subvariety は必ず intersect することに反し、不合理。よって ψ は birational finite morphism. V : normal なので Zariski' Main theorem により、φ は isomorphism. (q.e.d.)

次にあげる corollary は証明を省く。(詳しくは [3] を見よ。)

Cor: Let $m, n \in \mathbb{Z}_+$ and let $G = SL(m+1;\mathbb{C}) \times SL(n+1;\mathbb{C})$ act regularly and essentially effectively on an $(m+n+1)$-dimensional non-singular complete variety V. Denoting by G' (resp. G'') the subgroup $SL(m+1;\mathbb{C}) \times \{e\}$ (resp. $\{e\} \times SL(n+1;\mathbb{C})$) of G, we assume that $V^{G'}$ contains a subvariety W with two properties:

(a) $W \cong \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

(b) W is a single G''-orbit.

Then V is isomorphic to either $\mathbb{P}^{m+n+1}(\mathbb{C})$ or the projective bundle $\mathbb{P}(\underbrace{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)}_{(m+1)\text{-copies}} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})$

over $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ with some $d \in \mathbb{Z}$.

但し、上で essentially effective action といったのは $\{g \in G \,;\ g \cdot p = p \ \forall p \in V\}$ が finite group であるということである。

以上、我々の得た定理はその idea を Bialynicki-Birula [1] 及び Luna [2] に多く依っていることを注意して報告を終わる。

References

[1] A. Bialynicki-Birula : Some theorems on actions of algebraic groups, Ann. of Math., 98(1973), 480-497

[2] D. Luna : Slices étales, Bull. Soc. Math. France, Mémoire, 33 (1973), 81-105

[3] T. Mabuchi : Equivariant embeddings of normal bundles of fixed point loci, Osaka J. Math., 16 (1979)

[4] H. Sumihiro : Equivariant completion, J. Math. Kyoto Univ., 14 (1974), 1-28.